https://t.me/pimath1

بسم الله الرحمن الرحیم

سوالات موضوعی نهایی (سمن)

حسابان ۲

(۲۸ دوره سوال نهایی حسابان ۲)

مؤلفین:

رقیه پیله‌ور نیار

میکائیل صدقی

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

سرشناسه	: پیله‌ور نیار، رقیه، ۱۳۶۰-
عنوان و نام پدیدآور	: سوالات موضوعی نهایی حسابان (۲)/مولفین رقیه پیله‌ور نیار، میکائیل صدقی.
مشخصات نشر	: اردبیل: گونش‌نگار، ۱۴۰۵.
مشخصات ظاهری	: ۱۴۸ ص.: جدول، نمودار ؛ ۲۲ × ۲۹ س‌م.
شابک	: ۰-۴۴-۵۵۱۳-۶۲۲-۹۷۸: ۸۵۰۰۰۰۰ ریال
وضعیت‌فهرست نویسی	: فیپای مختصر
شناسه افزوده	: صدقی، میکائیل، ۱۳۵۳-
شماره‌کتابشناسی ملی	: ۹۳۶۳۲۶۳
اطلاعات رکوردکتابشناسی	: فیپا

- **نام کتاب : سوالات موضوعی نهایی حسابان ۲**
- **مولفین : رقیه پیله‌ور و میکائیل صدقی**
- **ناشر : انتشارات گونش‌نگار**
- **طراح روجلد : رباب حامدسلطانی**
- **رسم نمودارها : رقیه پیله‌ور**
- **نوبت چاپ : ویرایش چهارم، ۱۴۰۵**
- **تیراژ : ۱۰۰۰ جلد**
- **قیمت : ۸۵۰۰۰۰۰ ریال**
- **شابک : ۰-۴۴-۵۵۱۳-۶۲۲-۹۷۸**

آدرس: اردبیـــل، اول خیابان دانشگاه، روبروی اداره مخابرات، انتشارات گونش‌نگار

۰۹۱۴۳۵۸۵۶۲۸ ــ ۰۴۵ -۳۳۵۲۳۳۵۹

www.gunashnegarpub.ir

کلیه حقوق قانونی، مادی و معنوی برای مولفین و ناشر محفوظ است هیچ شخص حقوقی یا حقیقی حق تکثیر تمام یا قسمتی از این مجموعه را ندارد، در صورت مشاهده تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

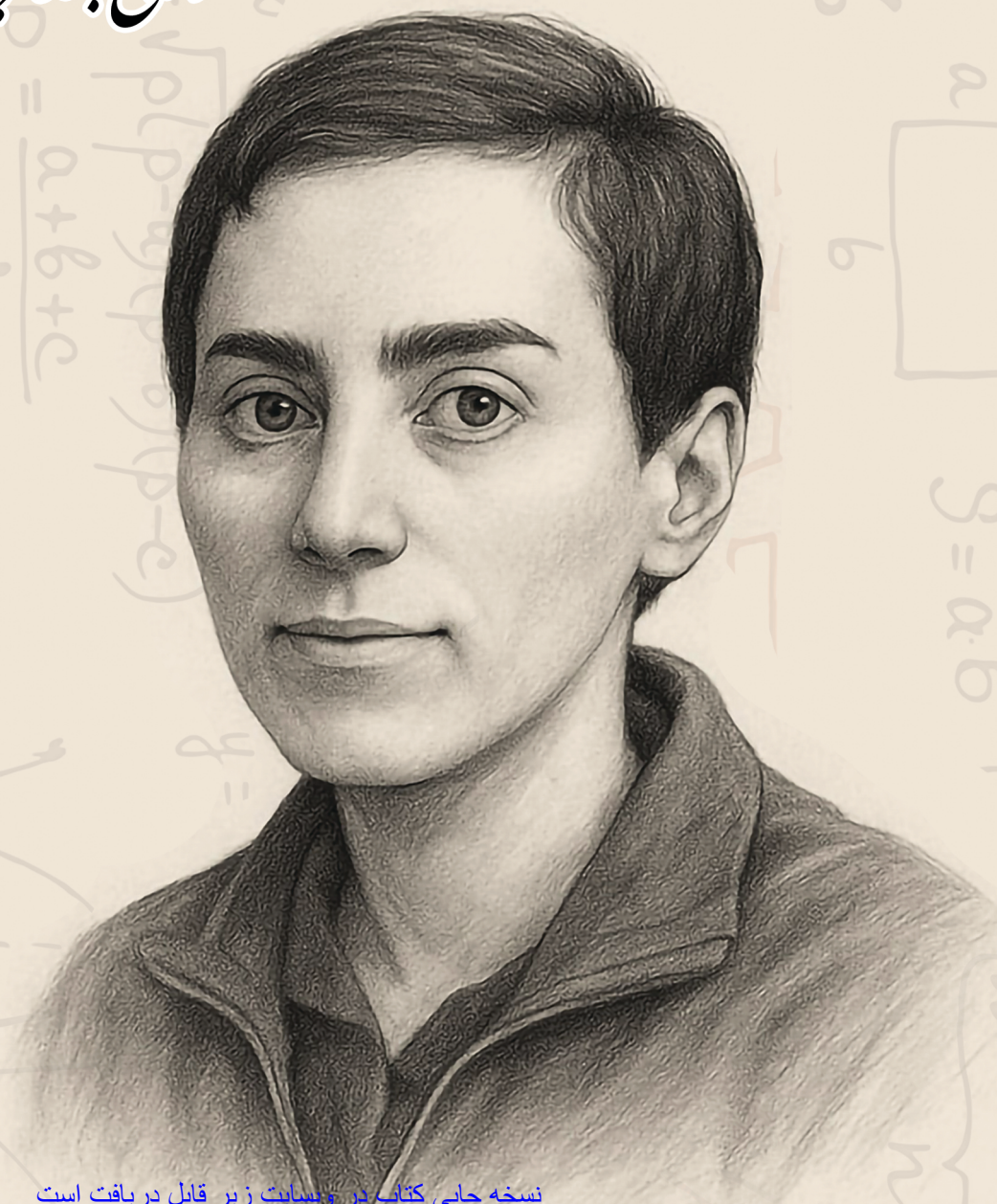
https://t.me/pimath1

تقدیم به

دبیران فرهیخته‌ی ریاضی

و دانش‌آموزان برتر

و روح بلند مریم میرزاخانی



نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

فهرست مطالب

مقدمه ۵

۱ تابع ۷

تبدیل نمودار توابع ۸

تابع درجه سوم، توابع‌یکنوا و بخش پذیری و تقسیم ۱۷

۲ مثلثات ۲۸

تناوب و تانژانت ۲۹

معادلات مثلثاتی ۳۷

۳ حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت ۴۳

حدهای نامتناهی – حد در بی‌نهایت ۴۴

۴ مشتق ۶۱

آشنایی با مفهوم مشتق ۶۲

مشتق‌پذیری و پیوستگی ۶۹

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۸۸

۵ کاربردهای مشتق ۹۲

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۹۳

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۱۰۲

رسم نمودار تابع ۱۰۷

سوالات آزمون هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۵ صبح ۱۵۸

سوالات آزمون هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۵ عصر ۱۶۴

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

مقدمه

کتابی که اکنون در دست دارید، حاصل سال‌ها تدریس، تجربه، تلاش مستمر، و همراهی صمیمانه با دانش‌آموزانی است که در مسیر امتحانات نهایی گام برداشته‌اند. آنچه پیش رو دارید، جامع‌ترین مجموعه‌ی سوالات نهایی حسابان ۲ پایه دوازدهم است؛ مجموعه‌ای که تمام سوالات رسمی برگزارشده از نخستین آزمون تا آخرین دوره (دی ۹۷ تا شهریور ۱۴۰۵) را بدون حذف، به‌صورت منظم، دسته‌بندی‌شده و درس‌به‌درس گردآوری کرده‌ایم تا دانش‌آموز با یک منبع کامل و مطمئن روبه‌رو باشد.

این مجموعه، برخاسته از دل کلاس‌های درس است. سال‌ها سوالات را به‌صورت جزوه‌های کلاسی حل و بررسی می‌کردیم، و تجربه نشان داد که کار با سوالات واقعی نهایی، مؤثرترین راه برای کسب نمره‌ی عالی است. با پیشنهاد همکاران ارجمند، این جزوه‌ها شکل کتاب به خود گرفت و خوشبختانه، در دو سال گذشته، با استقبال کم‌نظیری از سوی دبیران و دانش‌آموزان در سراسر کشور همراه شد. همین همراهی ارزشمند، انگیزه‌ای شد تا کتاب را در چاپ‌های بعدی با چینش بهتر، درس‌نامه‌های خلاصه و کاربردی، و طبقه‌بندی دقیق‌تر بازنگری و کامل‌تر کنیم.

در اینجا باید بر نکته‌ای کلیدی تأکید کنم:

به جرأت می‌توانم بگویم این مجموعه، تنها کتابی‌ست که تمام دانش‌آموزان، با هر سطح علمی و در هر نوع مدرسه‌ای، به آن نیاز دارند.

تفاوتی ندارد که در مدرسه‌ای هیأت امنایی، نمونه دولتی، تیزهوشان یا عادی تحصیل می‌کنید؛ تأثیر نمرات نهایی در رتبه‌ی کنکور و تراز علمی برای همگان یکسان است. بنابراین، داشتن منبعی کامل از سوالات نهایی، نه یک انتخاب، بلکه یک ضرورت آموزشی برای همه دانش‌آموزان محسوب می‌شود.

دانش‌آموز عزیز، این کتاب تنها یک مجموعه‌ی سوال نیست؛ نقشه‌ی راهی برای آمادگی کامل، مرور هدفمند، کاهش اضطراب امتحان و رسیدن به نتیجه‌ای مطلوب است. سوالات به ترتیب موضوعات کتاب درسی، همراه با نمره‌بندی، تاریخ برگزاری و نکات مهم جمع‌بندی شده‌اند تا مسیر یادگیری برایت هموارتر شود.

همکار محترم، این کتاب می‌تواند همراه آموزشی مؤثری در کلاس درس باشد. با توجه به ساختار منظم آن، می‌توانید از سوالات به‌عنوان تمرین، آزمون کلاسی، یا تکالیف هدفمند استفاده کنید. بی‌شک، حل این سوالات به‌صورت مستمر در طول سال تحصیلی، نقش مؤثری در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان دارد.

در پایان، از همه‌ی همکاران فرهیخته‌ای که با انتخاب این مجموعه به‌عنوان مرجع کلاس خود، به ما اعتماد کردند، صمیمانه سپاس‌گزاریم. این همراهی ارزشمند، دلگرمی بزرگی در مسیر تألیف و ارتقای کیفیت این اثر بوده است.

در صورت مشاهده‌ی هرگونه اشکال، پیشنهاد یا اصلاح، لطفاً از طریق وب‌سایت `math-pilevar.ir` ما را در جریان بگذارید تا در چاپ‌های آینده بهبودهای لازم اعمال گردد.

با تشکر: پیله‌ور - صدقی

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

نمونه سوالات نهایی که در این کتاب به صورت موضوعی تفکیک شده است عبارتند از:

۱	دی ۹۷
۲	خرداد ۹۸
۳	شهریور ۹۸
۴	دی ۹۸
۵	خرداد ۹۹
۶	خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت صبح
۷	خرداد ۹۹ خارج از کشور نوبت عصر
۸	شهریور ۹۹
۹	دی ۹۹
۱۰	خرداد ۱۴۰۰
۱۱	شهریور ۱۴۰۰
۱۲	دی ۱۴۰۰
۱۳	خرداد ۱۴۰۱
۱۴	شهریور ۱۴۰۱
۱۵	دی ۱۴۰۱
۱۶	خرداد ۱۴۰۲
۱۷	شهریور ۱۴۰۲
۱۸	دی ۱۴۰۲
۱۹	خرداد ۱۴۰۳
۲۰	شهریور ۱۴۰۳
۲۱	دی ۱۴۰۳
۲۲	خرداد ۱۴۰۴
۲۳	شهریور ۱۴۰۴
۲۴	دی ۱۴۰۵
۲۵	تیر و مرداد ۱۴۰۵
۲۶	مرداد ۱۴۰۵

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

۱

تابع

تبدیل نمودار توابع ۸
تابع درجه سوم، توابع‌یکنوا و بخش پذیری و تقسیم ۱۷

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

درس ۱

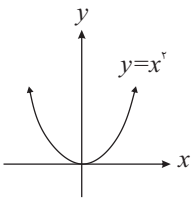
تبدیل نمودار توابع

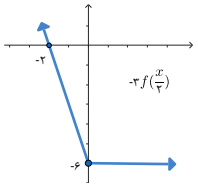
خلاصه درسنامه

برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

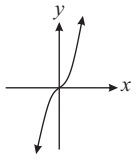
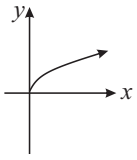
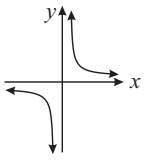
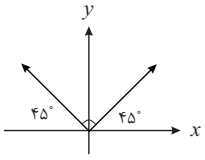
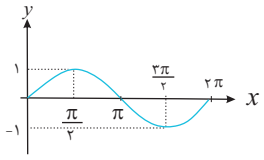
رسم نمودار تابع‌های معروف

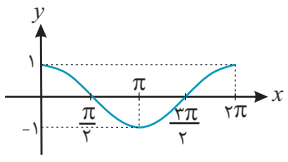
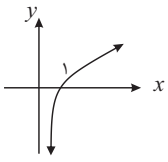
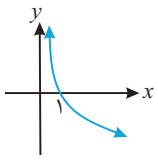
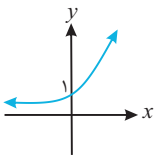
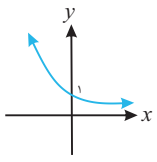
از معروف‌ترین توابع، تابع سهمی است. که سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید.





در سوالات نهایی‌توابع زیادی مطرح می‌شوند که علاوه بر سهمی مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

$y=x^3$	$y=\sqrt{x}$	$y=\frac{1}{x}$	$y=\lvert x\rvert$	$y=\sin x$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$
				

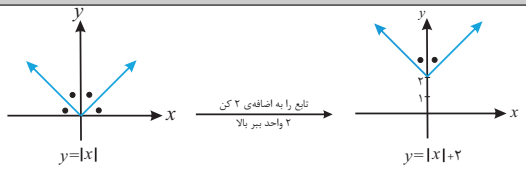
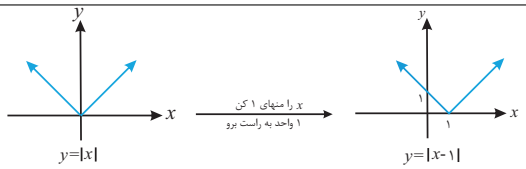
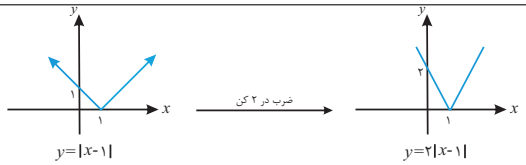
$y=\cos x$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$	$y=\log_a x$ $a>1$	$y=\log_b x$ $0<b<1$	$y=a^x$ $a>1$	$y=b^x$ $0<b<1$
				

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

رسم تابع با کمک انتقال و ...، ساختن تابع‌های جدید

	تغییر انجام شده	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	مثال
$f(x)+a$	کل تابع با عدد ثابت a جمع یا منها شده است.	$a>0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی a واحد به بالا منتقل کنید.	
		$a<0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی a واحد به پایین منتقل کنید.	
$f(x+b)$	در ضابطه تابع x شما با عدد ثابت b جمع یا منها شده است.	$b>0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی b واحد به سمت چپ منتقل کنید.	
		$b<0$ است: نمودار تابع را به اندازه‌ی b واحد به سمت راست منتقل کنید.	
$kf(x)$	تابع در عدد ثابت k ضرب شده است. $(k>0)$	تابع‌بدون هیچ تغییری در x و البته بدون انتقال، کشیده می‌شود طوری که همه‌ی yهای قبلی، k برابر می‌شوند.	

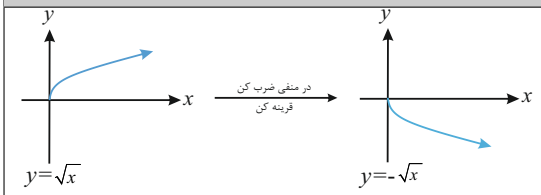
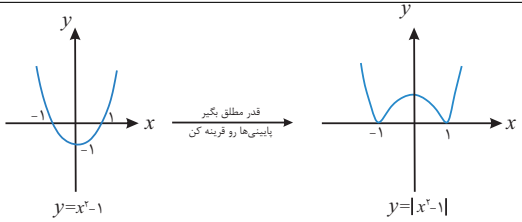
نکته:

۱) محل تلاقی نمودار تابع‌های f و kf با **محور xها** یکسان است.

۲) (x_0, y_0) در تابع f تبدیل می‌شود به (x_0, ky_0) در تابع kf ...

۳) در نمودار $y=kf(x)$؛

- اگر $0<k<1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور yها با ضریب k فشرده می‌شود: **انقباض عمودی**
- اگر $k>1$ باشد، نمودار تابع f در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود: **انبساط عمودی**

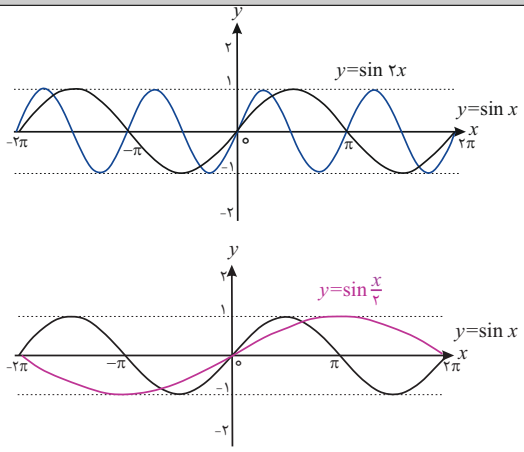
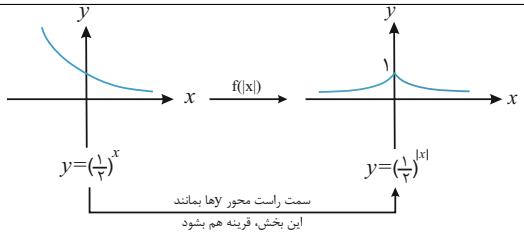
	تغییر انجام شده	تأثیر بر نمودار (روش رسم)	مثال
$-f(x)$	تابع در منفی ضرب شده است.	تابع را نسبت به محور xها قرینه کنید.	
$\|f(x)\|$	کل تابع داخل قدرمطلق قرار گرفته است.	بخشی از تابع که بالای محور x هاست، سرجای خودش می‌ماند و قسمتی که پایین محور xهاست، نسبت به محور xها قرینه کنید.	

از آنجا که تبدیل شدن $y=f(x)$ به $y=f(kx)$ فقط روی دامنه تأثیر می‌گذارد $(kx\in D_f)$ و هیچ ربطی به عرض نقاط نمودار ندارد، برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ **از کلمات انبساط و انقباض در راستای محور xها** استفاده می‌کنیم.

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

	تابع مطلوب	نحوه کشیدن نمودار از روی $y=f(x)$		مثال
۱	$y=f(kx)$ با فرض $k>0$	هر نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ را اینطوری می‌کشیم: xاش در $\frac{1}{k}$ ضرب شود و yاش تغییر نکند! $(a,b)\in f(x)\Rightarrow\left(\frac{a}{k},b\right)\in f(kx)$		
		$k>1$ (انقباض افقی) انگار نمودار $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود.	$0<k<1$ (انبساط افقی) انگار منحنی $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود.	
۲	$y=f(\lvert x\rvert)$	هر بخشی از نمودار تابع را که سمت چپ محور yهاست، حذف می‌کنیم و بخشی که در سمت راست محور yها باقی مانده نگه می‌داریم قرینه‌اش را هم نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.		

نکته: برای رسم $f(-x)$ اول نمودار $y=f(x)$ را رسم کن و بعد نمودار آن را نسبت به محور yها قرینه کن.

انتقال نمودار تابع در حالت کلی

۱) فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y=f(x)$ به نمودار $y=f(bx+c)$ برسید. $(b\neq 0)$

برای مثال: با داشتن تابع $y=f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y=f(۲x+۳)$ را رسم کنیم...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y=f(x)\rightarrow y=f(۲x+۳)$
اول هر x را منهای c کرده و بعد هر x را در $\frac{1}{b_0}$ ضرب کنید.	$(x_0,y_0)\rightarrow\left(\frac{x_0-c}{b},y_0\right)$	$(۷,۵)\rightarrow(۲,۵)$ $۲x+۳=۷\Rightarrow x=\frac{۷-۳}{۲}=۲$

۲) فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار تابع $y=f(x)$ به نمودار تابع $y=af(x)+d$ برسید. $(a\neq 0)$

برای مثال: با داشتن نمودار تابع $y=f(x)$ بخواهیم نمودار تابع $y=۲f(x)+۳$ را رسم کنیم ...

ترتیب مراحل	اثر روی نقطه	مثال برای حالت $y=f(x)\rightarrow y=۲f(x)+۳$
اول هر y را در a ضرب کرده و بعد هر y را با d جمع کنید.	$(x_0,y_0)\rightarrow(x_0,ay_0+d)$	$(۷,۵)\rightarrow(۷,۱۳)$ $(۵\times۲)+۳$

نکته: در تبدیل نمودار تابع $y=f(x)$ به $y=af(bx+c)+d$ $(a,b\neq 0)$، ترتیب عملیات به صورت زیر است:

$$y=f(x)\rightarrow y=af(bx+c)+d$$
(۳) (۲) (۱) (۴)

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

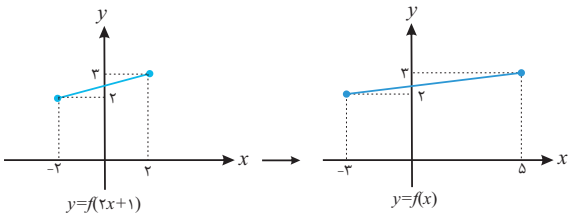
برای مثال: در انتقال $y=f(x)\to y=2f(3x+4)+5$ داریم: $(x_0,y_0)\to\left(\frac{x_0-4}{3},2y_0+5\right)$

۳ حالا فرض کنید می‌خواهید از روی نمودار انتقال یافته‌ی $y=f(x)$ به نمودار آن برسید؛ مثلاً نمودار تابع $y=f(2x+1)$ را به شما داده‌اند و قرار است نمودار $y=f(x)$ را مشخص کنید ...

- رسیدن به نمودار $y=f(x)$؛ با داشتن نمودار تابع $y=f(2x+1)$ برای رسیدن به نمودار تابع $y=f(x)$، اول هر x را در ۲ ضرب کنید و بعد هر x را به اضافه‌ی ۱ کنید ...

نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار تابع $y=f(bx+c)\ (b\neq 0)$ به نمودار $y=f(x)$ برسید؛ دستور داخل پرانتز را عیناً اجرا کنید! یعنی هر x ضربدر b و بعد هر x به اضافه‌ی c .....

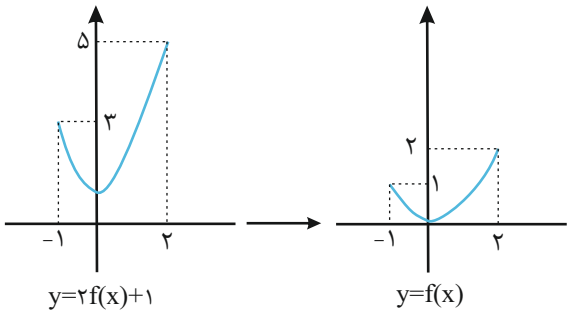
برای مثال:



در آخر فرض کنید با داشتن نمودار $y=2f(x)+1$، می‌خواهید به نمودار تابع $y=f(x)$ برسید؛ اول از هر y یک واحد کم می‌کنید و بعد هر y را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنی ....

نکته: اگر خواستید با داشتن نمودار $y=af(x)+d\ (a\neq 0)$ به نمودار $y=f(x)$ برسید؛ از راست به چپ و با عملیات مخالف حرکت کنید! یعنی هر y منهای d و بعد هر y تقسیم بر a ....

برای مثال:



نکته: در تابع $y=mf(ax+b)+n$، مقادیر a و b روی دامنه و مقادیر m و n روی برد تأثیر دارند.

نکته: اگر $D_{f(x)}=[m,n]$ باشد، برای محاسبه $D_{f(ax+b)}$، کافی است نامعادله $m\leq ax+b\leq n$ را حل کرده، سپس محدوده x را به دست آوریم که همان دامنه $f(ax+b)$ می‌باشد.

نکته: اگر $D_{f(ax+b)}=[m,n]$ باشد، برای محاسبه $D_{f(x)}$، کافی است از نامساوی $m\leq x\leq n$، محدوده $ax+b$ را به دست آوریم.

مثال

اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1,7]$ باشد، دامنه تابع $-2f(3x+1)$ را بدست آورید.

حل. کافی است نامعادله $-1\leq 3x+1\leq 7$ را حل کنیم:

$$-1\leq 3x+1\leq 7\Rightarrow -2\leq 3x\leq 6\Rightarrow -\frac{2}{3}\leq x\leq 2\Rightarrow D_{-2f(3x+1)}=\left[-\frac{2}{3},2\right]$$

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

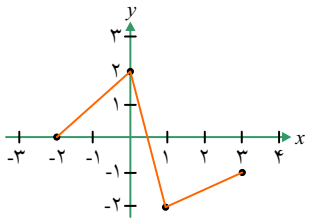
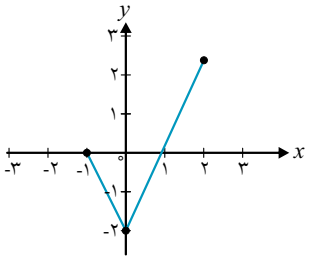
math-pilevar.com

مثال

اگر دامنه تابع $y=f(2x-3)$ برابر $[-1,2]$ باشد، دامنه تابع $y=f(x)$ را بدست آورید.

حل. $-1\le x\le 2\Rightarrow -2\le 2x\le 4\Rightarrow -5\le 2x-3\le 1\Rightarrow D_{f(x)}=[-5,1]$

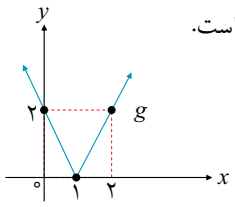
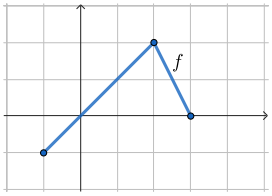
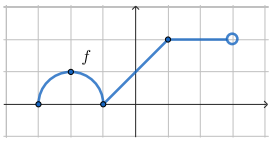
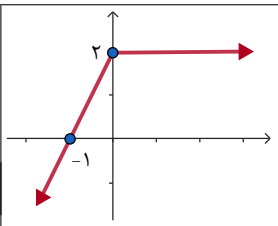
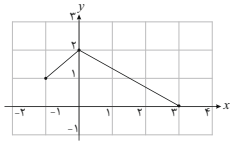
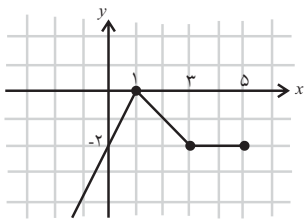
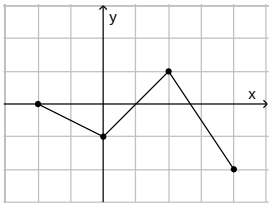
سوالات نهایی

ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. ۱) نقطه $(-8,6)$ روی نمودار $y=f(x)$ با نقطه $(-8,12)$ روی نمودار $y=\frac{1}{2}f(x)$ متناظر است. (دی ۱۴۰۱) ۲) نمودار تابع $y=-(x-3)^3$ را می‌توان با ۳ واحد انتقال نمودار $y=-x^3$ به سمت راست رسم کرد. (دی ۱۴۰۱) ۳) نمودار تابع $y=(x+2)^3$ را می‌توان با ۲ واحد انتقال نمودار تابع $y=x^3$ به سمت چپ، رسم کرد. (خرداد ۱۳۹۹ خارج) ۴) اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. (خرداد ۱۳۹۸)	هر مورد ۰/۲۵	
۲	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. ۱) نمودار تابع $y=2^{x-1}$ از انتقال ..... نمودار $y=2^x$ حاصل می‌شود. (افقی- عمودی) (دی ۱۴۰۴) ۲) اگر دامنه تابع $y=f(x)$ برابر بازه $[-1,2]$ باشد، دامنه تابع $g(x)=2f(x-1)$ برابر ..... است. (تیر و مرداد ۱۴۰۵) ۳) اگر دامنه تابع $y=f(x)$ برابر بازه $[-2,4]$ باشد، دامنه تابع $g(x)=f(2x)+1$ برابر بازه ..... است. (مرداد ۱۴۰۵) ۴) اگر برد تابع $y=\sqrt{x}$ بازه $[0,2]$ باشد، برد تابع $y=2+\sqrt{x-2}$ برابر ..... است. (شهریور ۱۴۰۲) ۵) اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از ..... نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. (شهریور ۱۴۰۰) ۶) اگر بازه‌ی $[-2,1]$ دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x+1)$ برابر ..... است. (شهریور ۱۳۹۹) ۷) نقطه‌ی $(-1,2)$ در تابع $y=f(2x+1)-1$ متناظر با نقطه‌ی ..... در تابع $y=f(x)$ است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج)	هر مورد ۰/۲۵	
۳	نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=2f\left(\frac{x}{2}\right)$ را رسم کنید. 	۱	دی ۱۴۰۴
۴	اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد: الف) بازه‌ای را بنویسید که تابع در آن اکیداً نزولی باشد. ب) نمودار تابع $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)+1$ را به کمک تابع f رسم کنید. 	۱	تیر و مرداد ۱۴۰۵

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

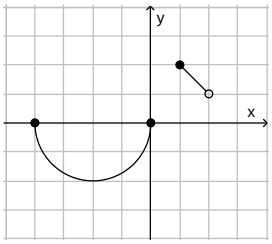
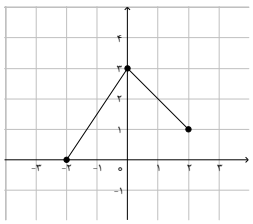
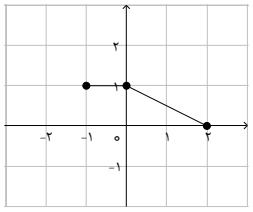
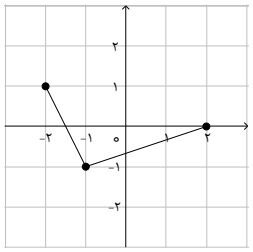
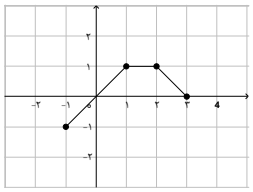
math-pilevar.com

۵	در شکل زیر نمودار تابع g فقط از انتقال افقی و انبساط عمودی نمودار تابع $f(x)=\|x\|$ به‌دست آمده است. الف) ضابطه تابع g را بنویسید. ب) بازه‌ای بنویسید که تابع g در آن صعودی باشد. 	۱	مرداد ۱۴۰۵
۶	در شکل زیر، نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-۲f\left(\frac{x}{۲}\right)+۱$ را رسم کنید. 	۱	شهریور ۱۴۰۴
۷	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است، اگر تابع $g(x)=۳f\left(\frac{۱}{۲}x\right)+۱$ باشد، آنگاه:  الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید. ب) اگر $A=(-۲,۱)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه متناظر A، روی نمودار تابع g را بنویسید.	۱/۵	خرداد ۱۴۰۴
۸	نمودار تابع $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.  الف) نمودار تابع $g(x)=-۳f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$ را رسم کنید. ب) مقدار $g(۵)$ را به دست آورید.	۱	دی ۱۴۰۳
۹	الف) اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=f(۲x+۱)$ را به کمک آن رسم کنید.  ب) اگر دامنه تابع g بازه $[-۲,۴]$ باشد، آنگاه دامنه تابع $k(x)=۳g(-۲x)$ را به دست آورید.	۱/۵	شهریور ۱۴۰۳
۱۰	نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است، نمودار تابع $y=-f(۲x-۱)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید. 	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۱۱	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=-۳f\left(\frac{x}{۲}\right)+۲$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید. 	۱	دی ۱۴۰۲

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

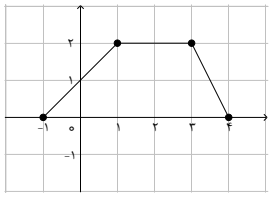
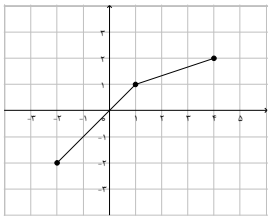
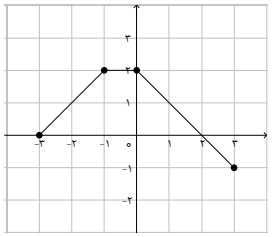
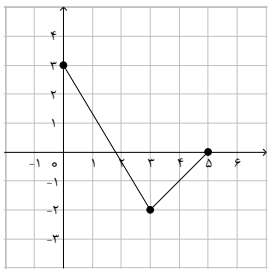
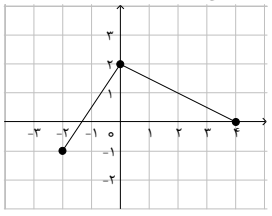
math-pilevar.com

۱۲	نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(1-x)+1$ را رسم کنید. 	۱	شهریور ۱۴۰۲
۱۳	الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازه $[0,4]$ رسم کنید. به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x)=2f(x-1)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۱۴	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید. 	۱	خرداد ۱۴۰۱
۱۵	نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x)=f(x-1)+2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید. 	۱	دی ۱۴۰۰
۱۶	نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x)=2f(x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. 	۱	شهریور ۱۴۰۰
۱۷	نمودار تابع $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ را به کمک نمودار $y=\cos x$ در بازه $[0,2\pi]$ رسم کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۰
۱۸	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=f(2x-1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید. 	۱	دی ۹۹

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

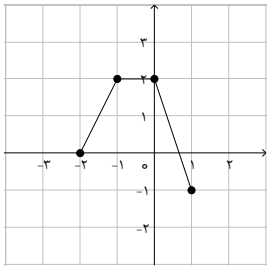
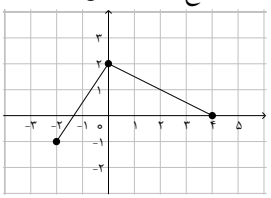
math-pilevar.com

۱۹	نمودار تابع زیر را به کمک نمودار $y=\cos x$ رسم کنید. $y=\cos(۲x)-۱$	۱	شهریور ۹۹
۲۰	اگر نمودار f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=f(x-۱)+۲$ زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. 	۱	خرداد ۹۹ خ
۲۱	با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است. نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. 	۱	خرداد ۹۹
۲۲	نمودار $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(۲x+۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. 	۰/۲۵	دی ۹۸
۲۳	کوتاه پاسخ دهید. نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به کدام محور است؟	۰/۵	شهریور ۹۸
۲۴	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(۳-x)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید. 	۱	شهریور ۹۸
۲۵	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را رسم کنید. سپس دامنه تابع g را تعیین کنید. 	۱/۲۵	تیر ۹۸

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

۲۶	نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بنویسید. 	۱	خرداد ۹۸
۲۷	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-f(۲x)$ را رسم کنید.سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. 	۱/۵	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.ir
math-pilevar.com

درس ۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

خلاصه درسنامه

تابع درجه سوم

تابع چندجمله‌ای: هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌گوییم که در آن a_0، a_1، ... و a_n اعداد حقیقی، n عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ است.

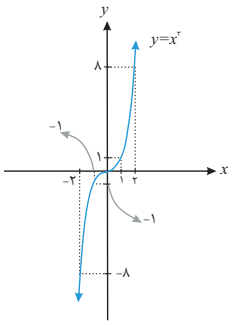
۱) دامنه‌ی همه‌ی تابع‌های چندجمله‌ای، $\mathbb{R}$ است.

۲) اگر در یک تابع چندجمله‌ای، n بزرگ‌ترین‌توان موجود برای x باشد، تابع را چندجمله‌ای درجه‌ nام می‌گوییم.

برای مثال: $f(x)=4+x+x^3$، یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی سوم و $f(x)=x^4+x^2+1$ هم تابعی چندجمله‌ای از درجه‌ی چهارم است....

۳) تابع‌های ثابت، همانی و خطی، تابع چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.

تابع $y=x^3$: تابع $y=x^3$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه ۳ است که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد:



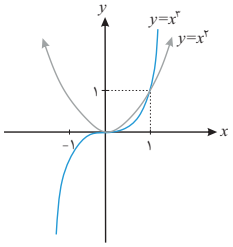
با توجه به نمودار، دامنه و برد این تابع برابر R است. همچنین این تابع، یک به یک و وارون‌پذیر می‌باشد. از دیگر ویژگی‌های این تابع آن است که نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد.

مقایسه نمودارهای توابع $y=x^2$ و $y=x^3$

اعداد بین صفر و ۱، ویژگی جالبی دارند: هرچه توانشان را بیشتر کنید، حاصلشان کمتر می‌شود. مثال: $(0/1)^2=0/01$، $(0/1)^4=0/0001$ ولی برای اعداد بزرگتر از ۱، روال معمولی است؛ توان بیشتر، حاصل بیشتر می‌دهد. مثال: $2^2=4$، $2^4=16$

نکته: $0<a<1 \xrightarrow{m>n} a^m<a^n$ و $b>1 \xrightarrow{m>n} b^m>b^n$

از آنجا که نمودار هر دو از نقطه‌ی $(1,1)$ می‌گذرند، رفتار $y=x^2$ و $y=x^3$ را قبل از $x=1$ و بعد از آن، با توجه به مطلب بالا بررسی می‌کنیم.



$y=x^3$ برای xهای مثبت، حرکتش را از زیر $y=x^2$ شروع می‌کند و پس از رسیدن به نقطه‌ی $x=1$، می‌رود بالای $y=x^2$.

توابع صعودی و توابع نزولی

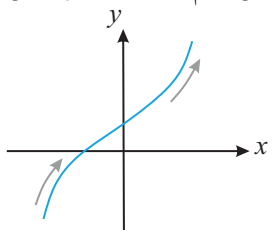
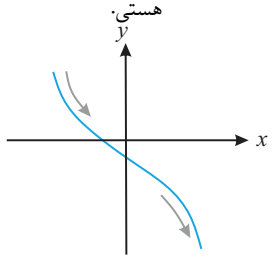
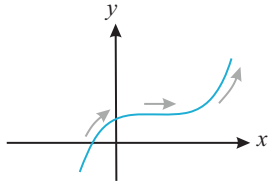
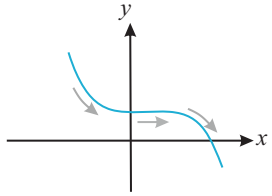
در یک تقسیم‌بندی کلی همه‌ی تابع‌هایی که می شناسیم، از نظر رفتار، در یکی از پنج دسته‌ی زیر قرار می‌گیرند:

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) اکیداً صعودی ۴) اکیداً نزولی ۵) غیریکنوا

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

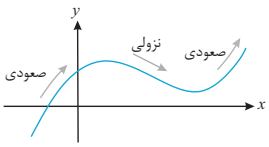
	تابع	به بیان فارسی	تشخیص از روی زوج مرتب‌ها	تعریف ریاضی: برای هر x_1 و x_2 عضو مجموعه‌ی I به طوری که $I \subseteq D_f$	وضعیت نمودار
۱	اکیداً صعودی	وقتی مقدار xها زیاد می‌شود، مقدار yهای نظیر آن‌ها هم زیاد می‌شود.	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که xها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، yها هم باید از کوچک به بزرگ باشند. $\{(۱,۱۰),(۲,۱۱),(۳,۱۵),(۴,۱۹)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول بیشتر است...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، مدام در حال بالا رفتن هستی. 
۲	اکیداً نزولی	وقتی مقدار xها زیاد می‌شود، yهای نظیر آن‌ها کم می‌شود.	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که xها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، yها از بزرگ به کوچک قرار می‌گیرند. $\{(۱,۲۰),(۲,۱۴),(۳,۹),(۴,۸)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ مقایسه‌ی دو نقطه با طول نامساوی روی نمودار تابع، عرض بیشتر برای نقطه‌ای با طول کمتر است....	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، مدام در حال پایین رفتن هستی. 
۳	صعودی	وقتی مقدار xها زیاد می‌شود، yهای نظیر آن‌ها کم نمی‌شود؛ yها یا زیاد می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می‌شوند ...	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که xها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y، یا از y قبلی خود بزرگ‌تر است یا با آن مساوی. $\{(۱,۱۰),(۲,۱۱),(۳,۱۱),(۴,۱۷)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ دو نقطه با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض بیشتری هم خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، یا بالا می‌روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی. 
۴	نزولی	وقتی مقدار xها زیاد می‌شود، yهای نظیر آن‌ها زیاد نمی‌شود؛ yها یا کم می‌شوند یا درجا می‌زنند و مساوی قبلی می شوند....	اگر زوج مرتب‌ها را طوری مرتب کنید که xها از کوچک به بزرگ نوشته شده باشند، هر y، یا از y قبلی خود کوچک‌تر است یا با آن مساوی. $\{(۱,۲۰),(۲,۲۰),(۳,۱۶),(۴,۱۱)\}$	در $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ دو نقطه با طول متفاوت روی نمودار تابع، یا عرض مساوی دارند یا نقطه‌ای که طول بیشتر دارد، عرض کمتری خواهد داشت...	اگر از سمت چپ، قلم را روی نمودار بگذاری و روی آن حرکت کنی، یا پایین می روی یا روی خط صاف حرکت می‌کنی. 

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

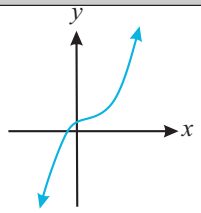
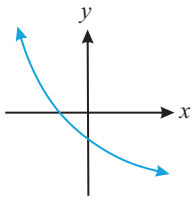
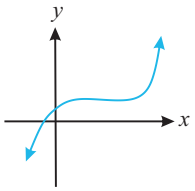
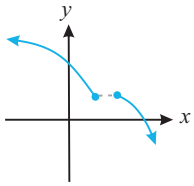
math-pilevar.com

تعریف تابعی را که در دامنه‌ی خود، در محدوده‌هایی صعودی و در محدوده‌هایی دیگر نزولی باشد، غیریکنوا می‌گوییم. آهنگ رفتاری تابع غیریکنوا تغییر می‌کند: گاهی بالا می‌رود و گاهی هم پایین.



تعریف ۱) به تابعی که **اکیداً صعودی** یا **اکیداً نزولی** باشد، می‌گوییم تابع اکیداً یکنوا.

۲) به تابعی که **صعودی یا نزولی** باشد، می‌گوییم **تابع یکنوا**.

اکیداً یکنوا		یکنوا	
			
اکیداً صعودی و صعودی	اکیداً نزولی و نزولی	صعودی هست؛ ولی اکیداً صعودی نه!	نزولی هست؛ ولی اکیداً نزولی نه!

نکته:

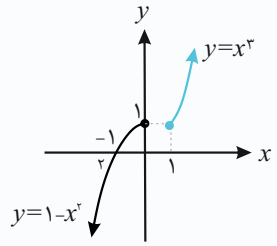
۱) فرق تابع صعودی با اکیداً صعودی در این است که تابع صعودی غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.

۲) فرق تابع نزولی یا اکیداً نزولی در این است که تابع نزولی غیراکید در محدوده‌ای از دامنه‌ی خود، ثابت می‌شود یا در دامنه‌ی خود نقطه‌های هم‌عرض دارد.

۳) تابع ثابت، هم صعودی محسوب می‌شود، هم نزولی.

مثال

تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 1 \\ 1-x^2 & x\leq 0 \end{cases}$ روی دامنه‌اش چگونه است؟



پاسخ: اگر از چپ به راست قلم را حرکت دهید می فهمید که تابع صعودی است. به خاطر وجود دو نقطه‌ی هم‌عرض (۱,۱) و (۰,۱) اکیداً صعودی نیست!

رفتار تابع‌های f و f^{-1}

در آخر می‌خواهیم ببینیم رفتار f^{-1} چگونه از رفتار f دستور می‌گیرد...

۱) اگر f اکیداً صعودی باشد، f^{-1} هم اکیداً صعودی خواهد بود و برعکس.

۲) اگر f اکیداً نزولی باشد، f^{-1} هم اکیداً نزولی خواهد بود و برعکس.

۳) اگر f یک به یک باشد، f^{-1} هم یک به یک خواهد بود و برعکس.

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

تقسیم و بخش‌پذیری

قضیه تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها: با تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $g(x)$ خارج قسمت منحصر به فرد $Q(x)$ و باقی‌مانده منحصر به فرد $R(x)$ وجود دارند به طوری که می‌توان نوشت:

$$\boxed{f(x)=g(x)Q(x)+R(x)}$$

مقسوم = مقسوم علیه × خارج قسمت + باقی‌مانده

توجه داشته باشید که همواره درجه باقی مانده $(R(x))$ از درجه مقسوم‌علیه $(g(x))$ کوچکتر است.

تعریف اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $g(x)$ برابر صفر شود، می‌گوییم $f(x)$ بر $g(x)$ بخش‌پذیر است. در این حالت $g(x)$ را یک فاکتور یا عامل $f(x)$ گویند.

محاسبه باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ بدون انجام عمل تقسیم

نکته: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ برابر با $f(a)$ است.

اگر مقسوم علیه برابر $x-a$ باشد، باقی‌مانده باید عددی ثابت باشد. بنابراین اتحاد تقسیم به صورت مقابل است: $f(x)=(x-a)q(x)+r$

مثال

باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^۴-۳x^۳+x+۹$ بر $x-۲$ برابر است با:

$$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow r=f(۲)=۲^۴-۳\times ۲^۳+۲+۹=۱۶-۲۴+۲+۹=۳$$

نکته: به طور مشابه، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر با $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ است.

مثال

مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x)=ax^۴+bx^۳-۳x^۲+x+۲$ بر $(x-۱)$ بخش‌پذیر بوده و باقیمانده تقسیم آن بر $(x+۱)$ برابر (-۴) باشد.

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow p(۱)=۰\Rightarrow a(۱)^۴+b(۱)^۳-۳(۱)+(۱)+۲=۰\Rightarrow a+b=۰$$

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow p(-۱)=-۴\Rightarrow a(-۱)^۴+b(-۱)^۳-۳(-۱)+(-۱)+۲=۰\Rightarrow a-b=-۲$$

$$\begin{cases} a+b=۰ \\ a-b=-۲ \end{cases}\Rightarrow \boxed{a=-۱},\ \boxed{b=۱}$$

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

مثال

اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+۱)$ و $(x-۲)$ به ترتیب ۲ و ۳ باشد. باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-x-۲$ کدام است؟

پاسخ: با توجه به سوال $f(-۱)=۲$ و $f(۲)=۳$ است، بنابراین اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $(x+۱)(x-۲)=x^۲-x-۲$ را به صورت $R(x)=ax+b$ نشان دهیم، داریم:

$$f(x)=(x+۱)(x-۲)Q(x)+ax+b \Rightarrow \begin{cases} f(-۱)=-a+b=۲ \\ f(۲)=۲a+b=۳ \end{cases} \Rightarrow a=\frac{۱}{۳}, b=\frac{۷}{۳}$$

در نتیجه باقی‌مانده به صورت $\frac{۱}{۳}x+\frac{۷}{۳}$ در می‌آید.

مثال

باقی‌مانده تقسیم $x^n \pm a^n$ را بر $x \pm a$ تعیین کنید. $(n \in \mathbb{N})$

پاسخ: در چهار حالت مختلف به حل این مثال می‌پردازیم:

۱) باقی‌مانده تقسیم $P(x)=x^n-a^n$ بر $x-a$

$$P(a)=a^n-a^n=۰$$

یعنی $P(x)=x^n-a^n$ همواره بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

۲) باقی‌مانده تقسیم $P(x)=x^n-a^n$ بر $x+a$:

$$P(-a)=(-a)^n-a^n=\begin{cases} ۰ & n=۲k \\ -۲a^n & n=۲k+۱ \end{cases}$$

یعنی $P(x)=x^n-a^n$ زمانی بر $x+a$ بخش‌پذیر است که n زوج باشد.

۳) باقی‌مانده تقسیم $P(x)=x^n+a^n$ بر $x+a$:

$$P(-a)=(-a)^n+A^n=\begin{cases} ۲a^n & n=۲k \\ ۰ & n=۲k+۱ \end{cases}$$

یعنی $P(x)=x^n+a^n$ زمانی بر $x+a$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

۴) باقی‌مانده تقسیم $P(x)=x^n+a^n$ بر $x-a$:

$$P(a)=a^n+a^n=۲a^n$$

یعنی $P(x)=x^n+a^n$ هیچگاه بر $x-a$ بخش‌پذیر نیست.

بررسی سه اتحاد مهم: حالت تعمیم‌یافته اتحادهای چاق و لاغر را در سه اتحاد زیر می‌توانید مشاهده کنید:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+x^{n-۲}a+x^{n-۳}a^۲+\cdots+xa^{n-۲}+a^{n-۱})$$

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-۱}-x^{n-۲}a+x^{n-۳}a^۲-\cdots-xa^{n-۲}+a^{n-۱});\ (n \text{ فرد})$$

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-۱}-x^{n-۲}a+x^{n-۳}a^۲-\cdots+xa^{n-۲}-a^{n-۱});\ (n \text{ زوج})$$

مثال

چندجمله‌ای $x^۶-۶۴$ را برحسب $(x+۲)$ تجزیه کنید.

پاسخ: با استفاده از اتحادهای گفته شده داریم:

$$x^۶-۲^۶=(x+۲)(x^۵-۲x^۴+۴x^۳-۸x^۲+۱۶x-۳۲)$$

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

سوالات نهایی

ردیف	سوال	بارم	تاریخ
۲۸	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.	هر مورد ۰/۲۵	
	۱) تابع $f(x)=(1-x)^3$، تابعی اکیداً نزولی است. (خرداد ۱۴۰۴)		
	۲) اگر n عدد طبیعی زوج و a عدد حقیقی باشد، آنگاه چند جمله‌ای x^n+a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است. (شهریور ۱۴۰۳)		
	۳) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f+g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است. (خرداد ۱۴۰۳)		
	۴) عبارت $x^{16}+1$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است. (شهریور ۱۴۰۲)		
	۵) تابع $f(x)=x^2-4x$ روی بازه $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی است. (دی ۱۴۰۱)		
	۶) تابع $y=-\log_5 x+1$ در دامنه خود،یک تابع اکیدا یکنوا است. (شهریور ۱۴۰۰)		
	۷) تابع $f(x)$ در بازه شامل a,b صعودی است. اگر $f(a)\le f(b)$ آنگاه $a\le b$ (دی ۱۳۹۹)		
	۸) چند جمله‌ای $P(x)=(2-x)^2(x+1)^3$ یک چند جمله‌ی از درجه‌ی ۵ است. (شهریور ۱۳۹۹)		
	۹) اگر تابع f دریک بازه نزولی اکیدا باشد، در این بازه نزولی نیز هست. (شهریور ۱۳۹۹)		
	۱۰) تابع $g(x)=2^{-x}$، تابعی است که در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج)		
	۱۱) در تقسیم $f(x)=x^3+2$ بر $p(x)=2x-1$ باقی مانده برابر صفر است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج)		
	۱۲) تابع $y=-x^2+2x$ روی بازه‌ی $(-\infty,3]$ اکیدا صعودی است. (خرداد ۱۳۹۹ خارج)		
	۱۳) نمودار تابع $y=x^3$ در بازه‌ی $[0,1]$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^2$ قرار دارد. (خرداد ۱۳۹۹)		
	۱۴) اگر تابع $y=f(x)$ دریک فاصله صعودی باشد، آنگاه در آن فاصله اکیدا صعودی نیز خواهد بود. (خرداد ۱۳۹۹)		
	۱۵) اگر تابع f دریک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیدا نزولی می‌باشد. (دی ۱۳۹۸)		
۲۹	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.	هر مورد ۰/۲۵	
	۱) اگر نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در راستای محور xها، دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم و آن را $g(x)$ بنامیم. آنگاه نمودار تابع $g^{-1}(x)$ از ناحیه ..... محورهای مختصات نمی‌گذرد. (شهریور ۱۴۰۳)		
	۲) تابع $f(x)=(x-2)^3+1$ را درنظر بگیرید. نمودار f^{-1} از ناحیه ..... محورهای مختصات عبور نمی‌کند. (خرداد ۱۴۰۳)		
	۳) اگر مقدار a برابر ..... باشد، تابع $f(x)=ax+b$ هم صعودی و هم نزولی است. (دی ۱۴۰۱)		
	۴) اگر تابعی در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله ..... است. (شهریور ۱۴۰۱)		
	۵) به تابعی که در یک بازه فقط صعودی‌یا نزولی باشد، ..... می‌گوییم. (خرداد ۱۴۰۰)		
	۶) برای آنکه تابع $y=ax+b$ در دامنه اش هم صعودی باشد هم نزولی، مقدار a باید برابر با ..... باشد. (خرداد ۱۳۹۹ خ)		
	۷) اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}\le\frac{1}{64}$ باشد، حدود x برابر ..... است. (دی ۱۳۹۸)		
	۸) باقی مانده تقسیم $f(x)=x^3-2x$ بر $x-1$ برابر با ..... است. (تیر ۱۳۹۸)		
	۹) اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)=x^2+kx-1$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد. مقدار k برابر ..... است. (دی ۱۳۹۷)		

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.ir
math-pilevar.com

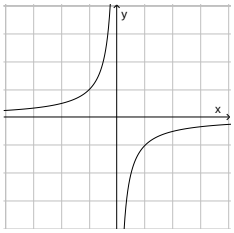
۳۰	فرض کنید تابع f در یک فاصله، اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a) \le f(b)$، نشان دهید $a \le b$.	۰/۷۵	دی ۱۴۰۴
۳۱	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $۲x^۳ + ax + b$ بر $x + ۲$ بخش‌پذیر و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - ۱$ برابر ۱۵ باشد.	۱	دی ۱۴۰۴
۳۲	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = x^۳ + ax + b$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر باشد و باقیمانده آن بر $x + ۲$ برابر ۳ باشد.	۱/۵	تیر و مرداد ۱۴۰۵
۳۳	باقی‌مانده تقسیم $p(x) = x^۳ + n$ بر $x - ۲$ برابر ۶ می‌باشد و $q(x) = x^۲ + mx + n$ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر است، مقادیر m و n را به‌دست آورید.	۱/۵	مرداد ۱۴۰۵
۳۴	اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f + g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است.	۱	شهریور ۱۴۰۴
۳۵	اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $p(x) = ۲x^۳ + mx - ۱$ بر $x + ۲$ برابر با ۱- باشد، مقدار m را به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۴
۳۶	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $p(x) = ۲x^۳ + ax^۲ - bx + ۲$ بر $x + ۲$ بخش‌پذیر و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - ۱$ برابر با ۲ باشد.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۴
۳۷	نمودار تابع $f(x) = -(x - ۲)^۳ + ۱$ را به کمک نمودار تابع $y = x^۳$ رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن تابع f را بررسی کنید.	۱	دی ۱۴۰۳
۳۸	اگر $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x-۳} \le \left(\frac{۱}{۲}\right)^{x+۱}$ باشد، حدود x را به دست آورید.	۰/۵	دی ۱۴۰۳
۳۹	اگر چند جمله‌ای $p(x) = x^۲ + a - ۲$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را بیابید.	۱	دی ۱۴۰۳
۴۰	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < ۰ \\ x^۲ & x > ۰ \end{cases}$ را رسم کنید. بزرگترین بازه‌ای که این تابع در آن اکیداً صعودی است را بنویسید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳
۴۱	اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^۳ + kx^۲ + ۲$ بر $x - k$ بخش پذیر باشد، مقدار k را بیابید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۳

درس ۲
توابع یکنوا

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

۴۲	الف) اگر چندجمله‌ای $p(x)=x^۳+mx+۲$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x+۱$ را به دست آورید. ب) چند جمله‌ای $x^۵-۱$ را طوری تجزیه کنید که $x-۱$ یک عامل آن باشد.	۱/۲۵	خرداد ۱۴۰۳
۴۳	ابتدا نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}(x-۲)^۳ & x\geq ۱\\ -۲ & ۰\leq x<۱\\ \lvert x+۱\rvert & x<۰\end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.	۱/۵	دی ۱۴۰۲
۴۴	اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=۳x^۲+mx+۲m+۱$ بر $x-۲$ برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=mx^۲-mx+۳$ بر $x+۲$ را تعیین کنید.	۱	دی ۱۴۰۲
۴۵	با توجه به نمودار تابع مقابل،تعیین کنید: الف) تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً یکنوا است. ب) آیا تابع در کل دامنه خود اکیداً یکنوا است؟ 	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۲
۴۶	مقادیر a و b را چنان بیابید که عبارت $p(x)=x^۳-ax+b$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر باشد و باقیمانده تقسیم آن بر $(x+۱)$ برابر ۳ باشد.	۱	شهریور ۱۴۰۲
۴۷	نمودار تابع $g(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x)=x^۳$ رسم کنید. سپس اکیداً یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود، بررسی کنید.	۱	خرداد ۱۴۰۲
۴۸	اگر $\frac{۱}{۱۲۵}\leq\left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲x+۱}$ باشد، حدود x را بیابید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۲
۴۹	اگر چندجمله‌ای $x^۲+ax-۸$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۲
۵۰	در چند جمله‌ای $P(x)=x^۳+ax^۲+b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر -۱ و $P(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد.	۱/۵	دی ۱۴۰۱
۵۱	عبارت $\frac{x^۵+۱}{x+۱}$ را ساده کنید.	۱	دی ۱۴۰۱

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

۵۲	اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^۴+kx^۲-۳$ بر $x+۱$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید.	۰/۷۵	شهریور ۱۴۰۱
۵۳	اگر $\left(\frac{۱}{۲۷}\right) \leq \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲x+۱}$ باشد، حدود x را به دست آورید.	۱	شهریور ۱۴۰۱
۵۴	چندجمله‌ای $x^۵+۳۲$ را بر حسب عامل $x+۲$ تجزیه کنید. (تکرار شهریور ۱۴۰۰)	۰/۵	شهریور ۱۴۰۱
۵۵	ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x$ را رسم نمائید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.	۱	خرداد ۱۴۰۱
۵۶	باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=۸x^۳-۴x^۲+۲$ را بر $۲x+۱$ به دست آورید.	۰/۵	خرداد ۱۴۰۱
۵۷	ابتدا نمودار تابع $f(x)=\lvert x-۱\rvert$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که تابع در چه بازه‌ای اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی است.	۱	دی ۱۴۰۰
۵۸	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $p(x)=x^۳+ax^۲+bx+۲$ بر $(x+۲)$ و $(x-۱)$ بخش پذیر باشد.	۱/۵	دی ۱۴۰۰
۵۹	با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x^۲+۲ & -۲\leq x<-۱ \\ -x-۱ & -۱\leq x<۱ \\ x^۲-۱ & ۱\leq x \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.	۱	شهریور ۱۴۰۰
۶۰	در $\left(\frac{۱}{۸۱}\right) \leq \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱۰-۲x}$ حدود x را بدست آورید.	۰/۵	شهریور ۱۴۰۰
۶۱	با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -۳x & -۱<x<۰ \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی می‌باشد؟	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۰

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

۶۲	باقیمانده تقسیم عبارت‌های $p(x)=x^3+ax+1$ و $q(x)=2x^2-x+1$ بر $(x+2)$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.	۰/۷۵	خرداد ۱۴۰۰
۶۳	با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\le 1\\ -1 & x>1\end{cases}$ تعیین کنید تابع درچه بازه‌ای صعودی و درچه بازه‌ای نزولی می‌باشد.	۱	دی ۹۹
۶۴	چند جمله‌ای x^6-1 را به عامل $x-1$ تجزیه کنید.	۱	دی ۹۹
۶۵	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+bx-2$ بر $x-2$ بخش‌پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۳ باشد.	۱/۵	شهریور ۹۹
۶۶	در چند جمله‌ای $y=x^3+ax^2+x+b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ باشد و بر $x+2$ بخش پذیر باشد.	۱	خرداد ۹۹ خ
۶۷	چند جمله‌ای x^5+1 را بر حسب عامل $x+1$ تجزیه کنید.	۰/۵	خرداد ۹۹ خ
۶۸	نمودار تابع $y=x^2+2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای این تابع اکیدا صعودی و درچه بازه‌ای اکیدا نزولی است.	۱	خرداد ۹۹
۶۹	مقدار a,b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر است.	۱	خرداد ۹۹
۷۰	در چند جمله‌ای $f(x)=x^3+ax^2+b$، مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ باشد و بر $x+2$ بخش پذیر باشد.	۱/۲۵	دی ۹۸
۷۱	کوتاه پاسخ دهید. الف) در فاصله‌ی $(0,1)$ از بین دو تابع $g(x)=x^3$ و $f(x)=x^2$، نمودار کدام تابع پایین‌تر از دیگری قرار دارد؟ ب) درجه‌ی تابع $f(x)=x^2(1-x)^5$ را مشخص کنید. ج) تابع $h(x)=\lvert x+2\rvert$ در چه بازه‌ای اکیدا صعودی است؟	۰/۷۵	شهریور ۹۸
۷۲	اگر $\log(x+1)\le\log(2x-3)$، حدود x را به دست آورید؟	۰/۵	شهریور ۹۸
۷۳	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$ بر $x+1$ و $x-2$ بخش پذیر باشد.	۱	شهریور ۹۸

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.ir

math-pilevar.com

۷۴	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x)=x^۳+ax^۲+bx+۱$ بر $x-۲$ بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر $x+۱$ برابر ۳ باشد.	۱	تیر ۹۸
۷۵	اگر چند جمله‌ای $f(x)=x^۲+ax-۳$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-۲$ را بدست آورید.	۰/۷۵	خرداد ۹۸
۷۶	چند جمله‌ای $x^۶-۱$ را بر حسب عامل $x+۱$ تجزیه کنید.	۰/۵	خرداد ۹۸
۷۷	نمودار تابع $f(x)=(x+۱)^۳$ را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این تابع در دامنه‌ی خود اکیدا صعودی است یا اکیداً نزولی؟	۰/۷۵	دی ۹۷
۷۸	هریک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید. الف) $x^۵+۱$ با عامل $x+۱$ ب) $x^۶-۱$ با عامل $x-۱$	۱	دی ۹۷

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

حسابان ۲

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.ir

درس ۱

تبدیل نمودار

math-pilevar.com

۱- ۱) نادرست (۰/۲۵)　　۳) درست (۰/۲۵)

۲) درست (۰/۲۵)　　۴) نادرست (۰/۲۵)

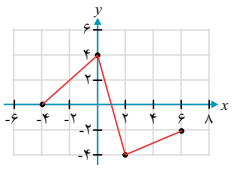
۲- ۱) افقی (۰/۲۵)　　۵) انقباض افقی (۰/۲۵)

۲) $[0,3]$ (۰/۵)　　۶) $[-1,0]$ (۰/۵)

۳) $[-1,2]$ (۰/۵)　　۷) $(5,0)$ (۰/۵)

۴) $[2,4]$ (۰/۵)

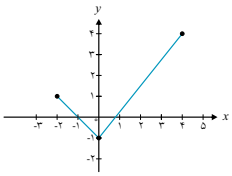
۳- نمایش دقیق هر نقطه (۰/۲۵)



۴- الف) $[-1,0]$ (۰/۲۵)

توجه: هر زیرمجموعه به صورت بازه از بازه $[-1,0]$، می‌تواند به عنوان پاسخ درست باشد.

ب) رسم شکل (۰/۷۵)



توجه: اگر نمودار به درستی رسم نشده باشد اما نقاط متناظر روی نمودار تابع f را به درستی به دست آورده باشد، فقط (۰/۲۵) نمره کم شود.

ب) $[1,+\infty)$ (۰/۵)

توجه: نوشتن هر بازه که زیرمجموعه بازه $[1,+\infty)$ باشد، قابل قبول است.

۵- الف) $g(x)=2|x-1|$ یا $g(x)=|2x-2|$ یا $g(x)=2f(x-1)$ یا

$$g(x)=\begin{cases}2x-2 & x\geq 1\\ -2x+2 & x<1\end{cases} \quad \text{یا} \quad g(x)=\begin{cases}2x-2 & x>1\\ 0 & x=1\\ -2x+2 & x<1\end{cases} \quad (۰/۵)$$

توجه ۱: هر یک از موارد بالا یا معادل آن‌ها به عنوان پاسخ درست پذیرفته شود.

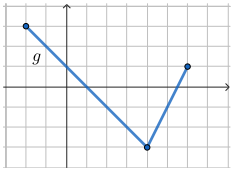
توجه ۲: در نوشتار تابع به صورت دو ضابطه‌ای، نقطه $x=1$ می‌تواند برای هر کدام از دو ضابطه بالا یا پایین تعریف شده باشد.

۶- رسم دقیق هر پاره‌خط نمودار تابع، هر کدام (۰/۵) نمره.

توضیحات نمره‌گذاری:

۱) اگر نمودار در چند مرحله رسم شود، به هر مرحله (۰/۲۵) تعلق گیرد.

۲) اگر نمودار دقیقاً به درستی رسم نشود ولی دامنه یا برد به درستی در شکل مشخص گردند، به هر کدام (۰/۲۵) تعلق گیرد.



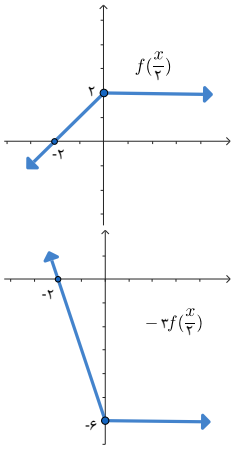
۷- الف) صفحه ۱۰ (۰/۵)　$Rg=[1,7]$　(۰/۵)　$Dg=[-6,6)$

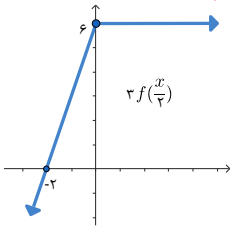
ب) (۰/۵)　$(-4,4)$

توضیحات جهت نمره‌گذاری:

در صورتی که باز یا بسته بودن بازه‌ها، به طور صحیح نوشته نشود. (۰/۲۵) کسر گردد.

۸- روش اول: رسم هر مرحله (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد.

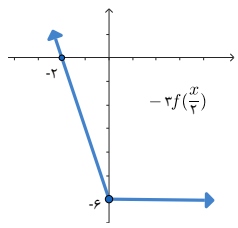




روش دوم: (انتقال نقاط)

$\underbrace{(-1,0)\to(-2,0)}_{۰/۲۵}$

$\underbrace{(0,2)\to(0,-6)}_{۰/۲۵}$

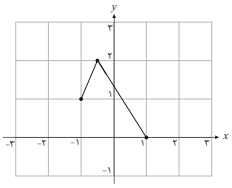


(اگر دانش‌آموز از هر روشی تنها شکل نهایی را درست ترسیم کرد، نمره کامل این بخش یعنی (۰/۷۵) نمره تعلق بگیرد.)

ب) (۰/۲۵)　$g(5)=-6$　(صفحه ۱۰)

۹- الف) راه‌حل اول

اگر نمودار نهایی، درست رسم شده باشد، نمره کامل تعلق گیرد. (۱ نمره)



راه‌حل دوم

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

اگر نمودار با انتقال به چپ و سپس انقباض افقی رسم شده باشد برای هر مرحله (۰/۵) تعلق گیرد.

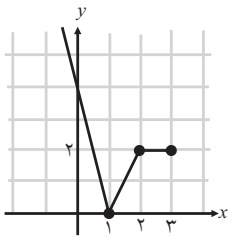
ب) $D_K = [\underbrace{-۲}_{۰/۲۵}, \underbrace{۱}_{۰/۲۵}]$

۱۰- دامنه: $(-\infty, ۳]$ (۰/۲۵)

برد: $[۰, +\infty)$ (۰/۲۵)

رسم نمودار: (۰/۷۵)

(صفحه ۱۲)



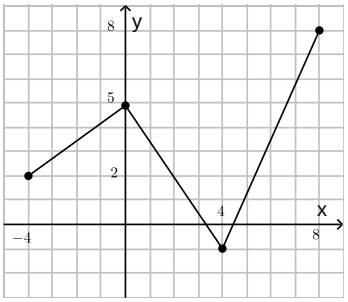
توضیحات جهت تصحیح: در رسم نمودار، هر قسمت که درست رسم شده است،(۰/۲۵) نمره تعلق گیرد.

در صورتیکه دانش آموزی نمودار را اشتباه رسم کرده، اما مطابق آن نمودار اشتباه، دامنه یا برد را درست نوشته است، نمره دامنه یا برد منظور شود.

۱۱- (صفحه ۱۲ کتاب)

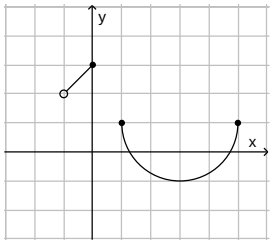
$R = [-۱, ۸]$ (۰/۵)

(رسم شکل (۰/۵))



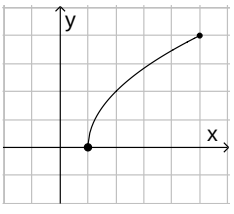
۱۲- صفحه ۱۲

(بارم هر قسمت رسم شکل (۰/۵) نمره)

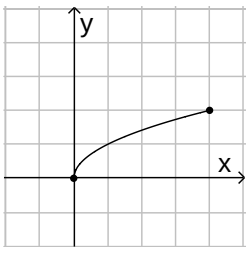


۱۳- مشابه کار در کلاس صفحه ۴

$R_g = [۰, ۴]$, $D_g = [۱, ۵]$

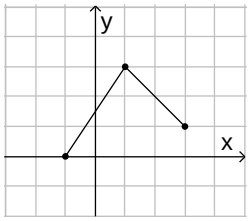


(ب)

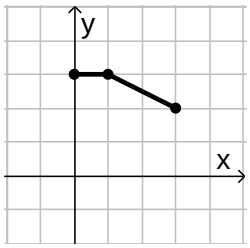


(الف)

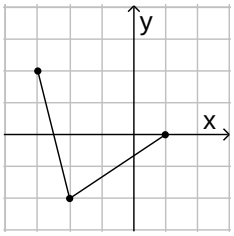
۱۴- $D_g = [-۱, ۳]$



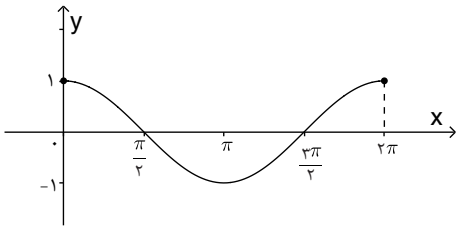
۱۵- $D_g = [۰, ۳]$

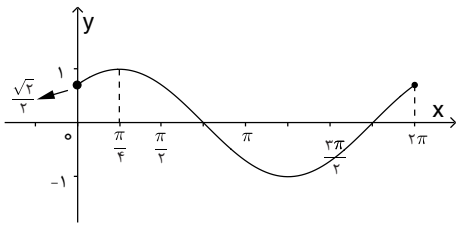


۱۶- $D_f = [-۳, ۱]$, $R_f = [-۲, ۲]$

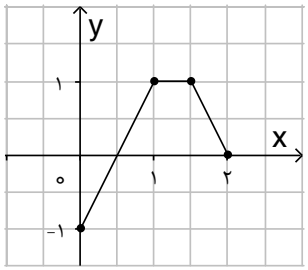


۱۷-





۱۸- $D = [۰, ۲]$, $R = [-۱, ۱]$

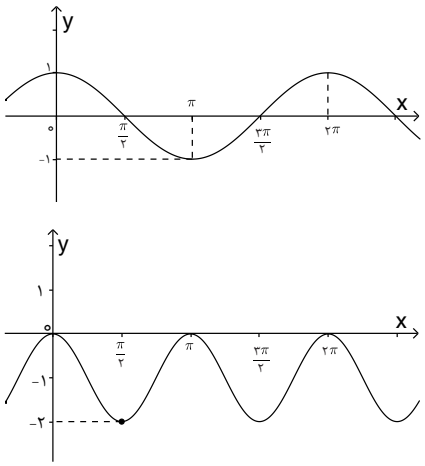


نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.ir

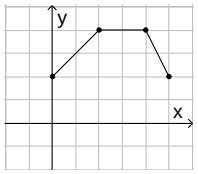
۱۹-



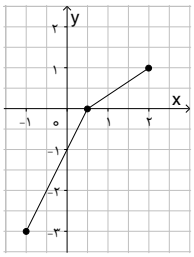
۲۰- کافی است نمودار تابع f را یک واحد به جلو و سپس دو واحد به سمت بالا منتقل کنید.

$D_f = [-۱, ۴]$ $R_f = [۰, ۲]$

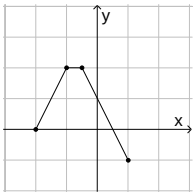
$D_g = [۰, ۵]$ $R_g = [۲, ۴]$



۲۱- $D_g = [-۱, ۲]$ $R_g = [-۳, ۱]$

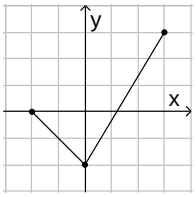


۲۲- $D = [-۲, ۱]$ $R = [-۱, ۲]$

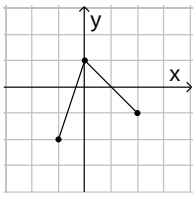


۲۳- محور طول‌ها

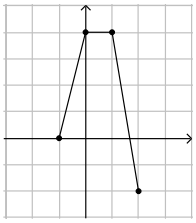
۲۴- $D_g = [-۲, ۳]$



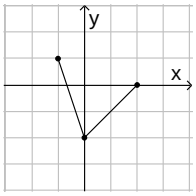
۲۵- برای رسم نمودار تابع g، ابتدا انقباض افقی برای $k = ۲$ در راستای محور طول‌ها سپس انتقال یک واحد رو به پایین در راستای محور عرض‌ها $D_g = [-۱, ۲]$



۲۶- $D_f = [-۱, ۲]$ $R_f = [-۲, ۴]$



۲۷- $D_f = [-۱, ۲]$ $R_f = [-۲, ۱]$



یادداشت ضروری دانش‌آموز:

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.ir

math-pilevar.com

درس ۲

تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

۲۸- ۱) درست (۰/۲۵)
۲) نادرست (۰/۲۵)
۳) درست (۰/۲۵)
۴) نادرست (۰/۲۵)
۵) درست (۰/۲۵)
۶) درست (۰/۲۵)
۷) درست (۰/۲۵)
۸) درست (۰/۲۵)
۹) درست (۰/۲۵)
۱۰) درست (۰/۲۵)
۱۱) نادرست (۰/۲۵)
۱۲) نادرست (۰/۲۵)
۱۳) نادرست (در نقاط $x=0$، $x=1$ دو تابع برابر هستند اگر بازه (۰,۱) در نظر بگیریم نمودار $y=x^3$ پایین‌تر از $y=x^2$ قرار می‌گیرد) (۰/۲۵)
۱۴) نادرست (۰/۲۵)
۱۵) نادرست (۰/۲۵)

۲۹- ۱) دوم (۰/۷۵)
۲) چهارم (۰/۲۵)
۳) صفر (۰/۲۵)
۴) ثابت (۰/۲۵)
۵) یکنوا (۰/۲۵)
۶) صفر (۰/۲۵)
۷) $\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$ (۰/۵)
۸) -1 (۰/۲۵)
۹) -2 (۰/۲۵)

۳۰- روش اول:

برهان خلف: فرض می‌کنیم $a>b$ (۰/۲۵). چون تابع f اکیداً صعودی است داریم:

$$a>b \Rightarrow f(a)>f(b) \quad (۰/۲۵)$$

که تناقض است، پس $a\le b$.

روش دوم:

اگر $f(a)=f(b)$ آنگاه $a=b$، زیرا تابع f اکیداً صعودی است. همچنین f^{-1} نیز اکیداً صعودی است. (۰/۲۵) پس

$$f(a)<f(b) \Rightarrow f^{-1}(f(a))<f^{-1}(f(b)) \Rightarrow a<b \quad (۰/۲۵)$$

۳۱-

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow 2(-2)^3+a(-2)+b=0 & (۰/۲۵) \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 2(1)^3+a(1)+b=15 & (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-1 \quad (۰/۲۵) \quad , \quad b=14 \quad (۰/۲۵)$$

۳۲- روش اول:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p(1)=1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1 \quad (۰/۵)$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2)=-8-2a+b=3 \Rightarrow -2a+b=11 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow a=-4 \quad (۰/۲۵) \quad , b=3 \quad (۰/۲۵)$$

توجه: اگر دانش‌آموزی ریشه‌های مقسوم علیه را به درستی به دست بیاورد اما ادامه فرایند را ننویسد لازم است برای هر یک از ریشه‌های مقسوم علیه (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد.

روش دوم: با تقسیم چند جمله‌ای x^3+ax+b بر $x-1$ و $x+2$ باقیمانده به ترتیب برابر با $a+b+1$ (۰/۲۵) و $-2a+b-8$ (۰/۲۵) می‌باشند، در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+1=0 \Rightarrow a+b=-1 & (۰/۲۵) \\ -2a+b-8=3 \Rightarrow -2a+b=11 & (۰/۲۵) \end{cases} \quad a=-4 \ (۰/۲۵) \ , \ b=3 \ (۰/۲۵)$$

۳۳- روش اول:

$$x-2=0 \text{ یا } x=2 \ (۰/۲۵) \Rightarrow p(2)=8+n=6 \ (۰/۲۵) \Rightarrow n=-2 \ (۰/۲۵)$$

$$x+1=0 \text{ یا } x=-1 \ (۰/۲۵) \Rightarrow q(-1)=-1-m+n=0 \ (۰/۲۵) \Rightarrow m=-1 \ (۰/۲۵)$$

توجه: در صورتی که دانش‌آموز مرحله «$x-2=0$ یا $x=2$» یا «$x+1=0$ یا $x=-1$» را ننویسد، اما در ادامه مقدار درست را جایگذاری کند، (۰/۲۵) کسر نگردد.

روش دوم:

$$\begin{array}{r|l} x^3+n & x-2 \\ \hline -(x^3-2x^2) & x^2+2x+4 \\ \hline 2x^2+n & \\ -(2x^2-4x) & \\ \hline 4x+n & \\ -(4x-8) & \\ \hline 8+n=6 \ (۰/۵) \Rightarrow n=-2 \ (۰/۲۵) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+mx+n & x+1 \\ \hline -(x^2+x) & x+m-1 \\ \hline (m-1)x+n & \\ -((m-1)x+m-1) & \\ \hline n-m+1=0 \ (۰/۵) \Rightarrow -2-m+1=0 \Rightarrow m=-1 \ (۰/۲۵) & \end{array}$$

۳۴- فرض کنید a و b دو عدد دلخواه در این فاصله باشند که $a<b$ (۰/۲۵). چون توابع f و g اکیداً صعودی هستند، نتیجه می‌شود که

$$\begin{cases} f(a)<f(b) & (۰/۲۵) \\ g(a)<g(b) & (۰/۲۵) \end{cases}$$

بنابراین، $f(a)+g(a)<f(b)+g(b)$ از این رو، نتیجه می‌شود که

$(f+g)(a)<(f+g)(b)$ (۰/۲۵) پس، $f+g$ روی این فاصله تابعی اکیداً صعودی است.

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.ir

-۳۵

$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$ (۰/۲۵)

$p(-۲)=-۱ \Rightarrow -۱۶-۲m-۱=-۱ \Rightarrow m=-۸$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

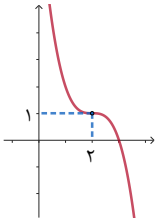
توضیحات نمره‌گذاری: اگر با تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای مقدار m به درستی به دست آید، به تناسب نمره تعلق گیرد.

-۳۶

$$\begin{cases} p(-۲)=۰ & (۰/۲۵) \\ p(۱)=۲ & (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۷ \\ a-b=-۲ \end{cases} (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{۵}{۳} & (۰/۲۵) \\ b=\frac{۱۱}{۳} & (۰/۲۵) \end{cases}$$

توضیحات جهت نمره‌گذاری: اگر با استفاده از تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای، دستگاه معادلات فوق حاصل شود و به درستی مقادیر a و b به دست آید، به تناسب نمره تعلق گیرد.

-۳۷ به رسم نمودار (انتقال افقی) (۰/۲۵)، انتقال عمودی (۰/۲۵) و قرینه‌یابی (۰/۲۵) نمره تعلق گیرد. (اگر دانش‌آموز، نمودار نهایی را با هر روشی، به درستی ترسیم نمود، (۰/۷۵) نمره تعلق گیرد)



$f(x)$ اکیداً نزولی (یا نزولی) است. (۰/۲۵) (صفحه ۲۱)

-۳۸ (صفحه ۲۲)

$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x+۱} \le \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲x-۳} \Rightarrow x+۱ \ge ۲x-۳ \Rightarrow x \le ۴$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

-۳۹ روش اول:

$x-a=۰ \Rightarrow x=a$ (۰/۲۵)

$a^۲+a-۲=۰ \Rightarrow a=۱$ (۰/۲۵) یا $a=-۲$ (۰/۲۵)

روش دوم: با تقسیم چند جمله‌ای $x^۲+a-۲$ بر $x-a$ داریم:

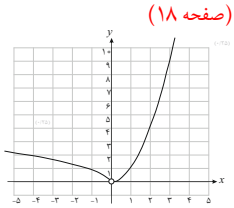
$x^۲+a-۲=(x-a)(x+a)+a^۲+a-۲$ (۰/۲۵)

با توجه به اینکه باقی‌مانده صفر است، بنابراین:

$$a^۲+a-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ & (۰/۲۵) \\ a=-۲ & (۰/۲۵) \end{cases}$$

(صفحه ۱۹)

-۴۰ در بازه $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است. (۰/۲۵) (صفحه ۱۸)



رسم نمودار (۰/۵)

-۴۱

$x-k=۰ \Rightarrow x=k \Rightarrow p(k)=۰ \Rightarrow k^۳+k^۳+۲=۰ \Rightarrow k^۳=-۱ \Rightarrow k=-۱$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

به پاسخ درست که از طریق تقسیم چند جمله‌ای بر دو جمله‌ای حاصل شود، به تناسب بارم، نمره تعلق گیرد. (صفحه ۱۹)

-۴۲

الف) $p(۲)=۰ \Rightarrow ۸+۲m+۲=۰ \Rightarrow m=-۵$, $p(-۱)=۶$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $x^۵-۱=(x-۱)(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$ (۰/۵)

(صفحه ۲۰ و ۲۲)

توضیحات جهت تصحیح: اگر دانش آموزی از روش تقسیم معمولی مسئله را حل کند، نمره کامل تعلق گیرد.

اگر دانش آموزی مقدار m را اشتباه به دست آورد و قسمت دوم (الف) را بر اساس آن مقدار، درست حل کند، به قسمت دوم نمره تعلق گیرد.

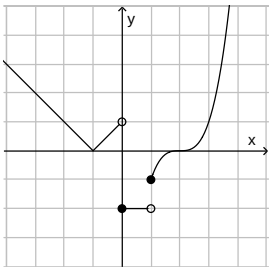
در قسمت (ب)، اگر علامت قسمت دوم تجزیه، یکی در میان مثبت و منفی گذاشته شده باشد، ۰/۲۵ نمره تعلق گیرد.

-۴۳ (صفحه ۲۱ کتاب)

اکیداً صعودی $[۱,+\infty)$ و $(-۱,۰]$ (۰/۵)

اکیداً نزولی $(-\infty,-۱]$ (۰/۲۵)

رسم شکل (۰/۲۵)



-۴۴

$p(۲)=۳ \Rightarrow ۱۲+۲m+۲m+۱=۳ \Rightarrow ۴m=-۱۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow m=-\frac{۵}{۲}$ (۰/۵)

$f(-۲)=-\frac{۵}{۲}(-۲)^۲-\left(-\frac{۵}{۲}\right)(-۲)+۳=-۱۲$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

-۴۵ صفحه ۲۱

الف) اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) $(۰,+\infty)$ و (۰/۲۵)

اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) $(-\infty,۰)$ (۰/۲۵)

ب) خیر، در کل دامنه اکیداً یکنوا نیست. (۰/۲۵)

-۴۶

$$\begin{cases} p(۲)=۰ \Rightarrow ۸-۲a+b=۰ & (۰/۲۵) \\ p(-۱)=۳ \Rightarrow a+b=۴ & (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a+b=-۸ \\ a+b=۴ \end{cases}$$

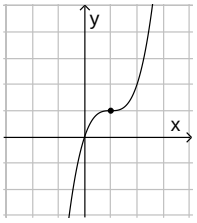
نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

-۴۷

$$g(x)=x^3-3x^2+3x-1+1=(x-1)^3+1$$



اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

-۴۸

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1}\le\left(\frac{1}{5}\right)^3\Rightarrow 2x+1\ge 3\Rightarrow x\ge 1$$

-۴۹

$$x=a\Rightarrow 2a^2-8=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

-۵۰

$$\begin{cases}p(-2)=-1\\ p(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+b=7\\ a+b=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=\frac{8}{3},\quad b=\frac{-11}{3}$$

-۵۱

$$\frac{x^5+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x+1}$$

$$=x^4-x^3+x^2-x+1$$

-۵۲

$$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow p(-1)=2$$

$$\Rightarrow(-1)^4+k(-1)^2-3=2\Rightarrow k=4$$

-۵۳

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}\le\left(\frac{1}{3}\right)^3\Rightarrow 2x+1\ge 3\Rightarrow x\ge 1$$

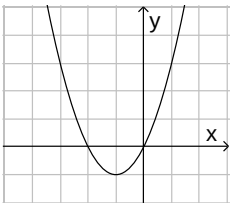
-۵۴

$$x^5+32=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

-۵۵

$[-1,+\infty)$ اکیداً صعودی

$(-\infty,-1]$ اکیداً نزولی



-۵۶

$$2x+1=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$$

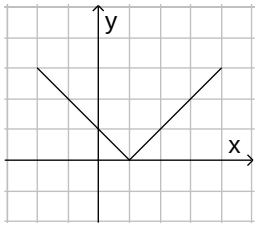
$$\Rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow r=0$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}a=4 & (0/25)\\ b=0 & (0/25)\end{matrix}$$

-۵۷

$[1,+\infty)$ اکیداً صعودی

$(-\infty,1]$ اکیداً نزولی



-۵۸

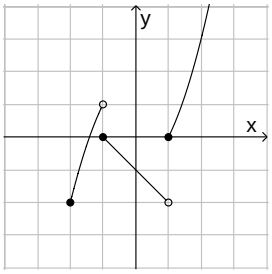
$$\left.\begin{matrix}-8+4a-2b+2=0\Rightarrow 4a-2b=6\\ 1+a+b+2=0\Rightarrow a+b=-3\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=0,b=-3$$

-۵۹

$[-2,-1)$ صعودی

$[1,+\infty)$ صعودی

$[-1,1)$ نزولی



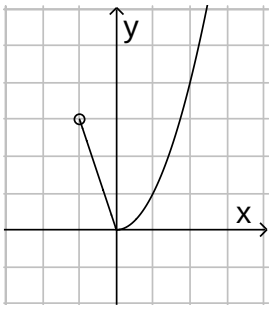
-۶۰

$$3^{2x-10}\le 3^{-4}\Rightarrow 2x-10\le -4\Rightarrow x\le 3$$

-۶۱

$(-1,0]$ اکیداً نزولی

$[0,+\infty)$ اکیداً صعودی



-۶۲

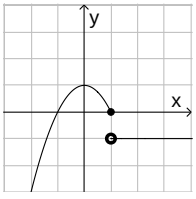
$$x+2=0\Rightarrow x=-2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}p(-2)=-2a-7\\ q(-2)=11\end{cases}\Rightarrow p(-2)=q(-2)\Rightarrow a=-9$$

-۶۳

$(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$ صعودی

$[0,+\infty)$ نزولی



نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook

https://t.me/pimath1

math-pilevar.com

-۶۴ $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

-۶۵ $x-2=0\Rightarrow x=2$

$p(2)=8+4a+2b-2=0\Rightarrow 4a+2b=-6\Rightarrow 2a+b=-3$

$x+1=0\Rightarrow x=-1$

$p(-1)=-1+a-b-2=3\Rightarrow a-b=6$

$$\begin{cases}2a+b=-3\\ a-b=6\end{cases}\Rightarrow a=1,b=-5$$

-۶۶ $x-1=0\Rightarrow x=1$

$\Rightarrow 1^3+a(1)^2+1+b=4\Rightarrow a+b=2$

$x+2=0\Rightarrow x=-2$

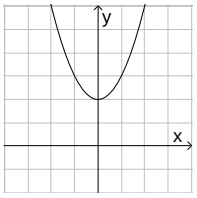
$\Rightarrow (-2)^3+a(-2)^2+(-2)+b=0\Rightarrow 4a+b=10$

$$\begin{cases}a+b=2\\ 4a+b=10\end{cases}\Rightarrow a=\frac{8}{3},b=-\frac{2}{3}$$

-۶۷ $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

-۶۸ اکیداً نزولی $(-\infty,0)$

اکیداً صعودی $(0,+\infty)$



-۶۹ $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$

$x-2=0\Rightarrow x=2$

$\Rightarrow P(2)=2^3+a(2)^2+b(2)+1$

$=9+4a+2b=0\Rightarrow 4a+2b=-9$

$x+1=0\Rightarrow x=-1$

$\Rightarrow P(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1$

$=a-b=0\Rightarrow a-b=0$

$$\begin{cases}4a+2b=-9\\ a-b=0\end{cases}\quad a=-\frac{3}{2},b=\frac{-3}{2}$$

-۷۰ $x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow P(1)=4\Rightarrow a+b=3$

$x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow P(-2)=0\Rightarrow 4a+b=8$

$$\begin{cases}a+b=3\\ 4a+b=8\end{cases}\Rightarrow a=\frac{5}{3},b=\frac{4}{3}$$

-۷۱ الف) $g(x)=x^3$

ب) ۷

پ) $(-2,+\infty)$

-۷۲ $x+1\le 2x-3\Rightarrow x\ge 4$

-۷۳ $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$

$x-2=0\Rightarrow x=0$

$\Rightarrow P(2)=2^3+a(2)^2+b(2)+1$

$=9+4a+2b=0\Rightarrow 4a+2b=-9$

$x+1=0\Rightarrow x=-1$

$\Rightarrow P(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1$

$=a-b=0\Rightarrow a-b=0$

$$\begin{cases}4a+2b=-9\\ a-b=0\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{3}{2},b=-\frac{3}{2}$$

-۷۴ $P(2)=0\Rightarrow 4a+2b=-9$

$P(-1)=3\Rightarrow a-b=3$

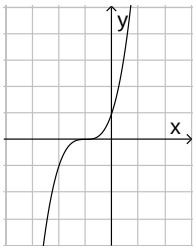
$$\begin{cases}4a+2b=-9\\ a-b=3\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{2},b=-\frac{7}{2}$$

-۷۵ $f(-1)=0\Rightarrow 1-a-3=0\Rightarrow a=-2$

$f(2)=4-4-3=-3$

-۷۶ $x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

-۷۷ اکیدا صعودی



-۷۸ $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

یادداشت ضروری دانش‌آموز:

نسخه چاپی کتاب در وبسایت زیر قابل دریافت است
www.math-pilevar.com
www.basalam.com\samanbook